Задачи областной математической олимпиады

4 января 1999 года

11-й класс

▸ **1.** Окружность радиуса R скатывается по прямой $y = -x-1$ и при этом не пересекает параболу $y = x$. При каком R это возможно?

▸ **2.** Решите уравнение

$$\cos \frac{2\sqrt{\pi(y-\pi)}}{y} = 1.$$

▸ **3.** Положительные числа x и y таковы, что $x + y \leqslant 2$. Найдите наименьшее значение выражения $1/x + 1/y$.

▸ **4.** Диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что четыре точки, симметричные точке пересечения диагоналей относительно сторон данного четырехугольника, лежат на одной окружности.

▸ **5.** Круглый плот радиуса R движется по реке, берега которой задаются графиками функций $y = x^3$ и $y = x^3 + 1999$. При каком значении радиуса плот может проплыть всю реку?

▸ **6.** Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\max(z, x) \cdot \max(y, 1999) = y \cdot \min(x, 1999).$$

Расположите числа x, y, z в порядке возрастания.

Решения задач

11-й класс

▸ **1.** Найдем уравнение касательной к параболе, которая параллельна данной прямой $y = -x - 1$. Получим прямую $y = -x - 0{,}25$. Рассматривая точки пересечения двух этих прямых с осью OY, легко определить расстояние между этими прямыми. Это расстояние равно диаметру самого большого круга, удовлетворяющего условию задачи. В итоге находим, что $R < 3\sqrt{2}/8$.

▸ **2.** *Ответ.* $y = \pi$. Решение сводится к квадратному уравнению с параметром. Требование неотрицательности дискриминанта дает один корень.

▸ **3.** *Первое решение.* Пусть переменные x и y удовлетворяют условию $x + y = c$, где постоянная c лежит в пределах от 0 до 2. Тогда рассматривая данное выражение как функцию переменной x, легко получить, что наименьшее его значение достигается при $x = c/2$ и равно 4/c. Следовательно, наименьшее из этих значений равно 2 и достигается при наибольшем $c = 2$.

Второе решение. Ввиду неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{2}{1/x + 1/y}$$

находим, что $1/x + 1/y \geqslant 4/(x + y) \geqslant 2$. Равенство достигается только в том случае, когда $x = y = 1$.

▸ **4.** Достаточно доказать, что проекции точки пересечения диагоналей данного четырехугольника лежат на одной окружности (в силу подобия двух четырехугольников).

Построим на четырех отрезках диагоналей как на диаметрах четыре окружности. Соединим отрезками прямых точку пересечения диагоналей и проекции этой точки на стороны данного четырехугольника. При этом каждый угол данного четырехугольника и четырехугольника, образованного проекциями, разделился на две части. У нас получилось всего 16 углов. Среди них имеются равные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Отсюда нетрудно получить, что сумма противоположных углов в четырехугольнике, образованном проекциями, равна 180°. Это доказывает утверждение задачи.

▸**5.** Рассмотрим две точки на графиках этих функций с абсциссами x и $x + L$, которые имеют одинаковую ординату. Это приводит к уравнению $x^3 + 1999 = (x + L)^3$. Получаем квадратное уравнение относительно x с параметром L. Легко видеть, что дискриминант этого уравнения положителен при любом сколь угодно малом положительном значении L. Это означает, что для любого L найдутся две точки на противоположных берегах реки, расстояние между которыми равно L. Стало быть, берега реки неограниченно сближаются, и любой круглый плот рано или поздно обязательно застрянет и пройти всю реку не сможет.

▸**6.** Имеем два верных неравенства

$$\max(z, x) \geqslant x \geqslant \min(x, 1999), \quad \max(y, 1999) \geqslant y.$$

Перемножив два этих неравенства (это можно сделать, т. к. все числа положительны), получим, что левая часть данного уравнения не меньше правой, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда указанные выше неравенства превращаются в равенства. Тогда получаем такое расположение чисел в порядке возрастания: $z \leqslant x \leqslant 1999 \leqslant y$.