Самарский Государственный Университет

XIV КОМАНДНОЕ ПЕРВЕНСТВО ПО МАТЕМАТИКЕ

САММАТ-2006

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

САМАРА
12 марта 2006 года

В сборнике представлены условия задач, предлагавшихся на командном первенстве по математике САММАТ в 2006 году, с указаниями и решениями.

В обсуждении задач приняли участие: *А. А. Андреев, А. Н. Савин.*
Техническая верстка: *А. Н. Савин.*

Электронная версия данной книги размещена на сайте
`http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/`
и доступна для свободного некоммерческого использования.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7-й класс

▸**7.1.** Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

▸**7.2.** На рис. 1 изображена четверть круга, разделенная на 4 части биссектрисой и полуокружностью вдвое меньшего радиуса. Покажите, что площади частей 1 и 3 равны.

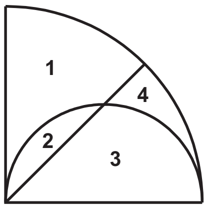


Рис. 1

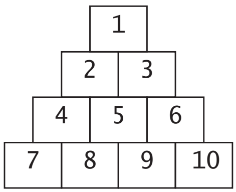


Рис. 2

$$
\begin{array}{r|l}
-\,{*}2{*}5{*} & 325 \\ \cline{2-2}
{*}{*}{*}\phantom{{*}{*}} & 1{*}{*} \\ \cline{1-1}
-\,{*}0{*}{*} & \\
{*}9{*}{*} & \\ \cline{1-1}
-\,{*}5{*} & \\
{*}5{*} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Рис. 3

▸**7.3.** Переложите пирамиду из 10-ти кубиков так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками (рис. 2).

▸**7.4.** Восстановите действия (рис. 3).

▸**7.5.** Жители города А — правдолюбцы, города Б — лжецы. По дороге из А в Б жители обоих городов поставили указатели, на которых по направлению своего города написали «Путь в город А». Какой единственный вопрос надо задать случайному прохожему (жителю одного из этих городов), чтобы, получив ответ «да» или «нет», узнать направление в город А?

▸**7.6.** В равенстве $101 - 102 = 1$ передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.

▸**7.7.** За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 458. Как за несколько ходов получить число 14?

▸**7.8.** В треугольнике ABC сторона AC — наименьшая. На ней выбрана произвольная точка P. Докажите, что

$$BP > \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

▸ **7.9.** Число x удовлетворяет уравнению $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)=\frac{1}{2}x$. Докажите, что $x<0$.

▸ **7.10.** Шифр устроен следующим образом: каждой цифре сопоставлено по три буквы (см. таблицу), а знаку $*$ две буквы и пробел.

Таблица.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
	а	г	ж	й	м	п	т	х	ш	ы	ю
	б	д	з	к	н	р	у	ц	щ	ь	я
	в	е	и	л	о	с	ф	ч	ъ	э	

Попробуйте расшифровать следующую запись:

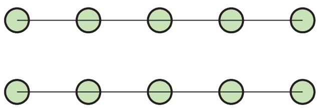
5343934∗150413∗6∗414724144414∗8156215044414∗305041080.

8-й класс

▸ **8.1.** $(a^2+a+1)^2=(b^2+b+1)^2$. Верно ли, что $a=b$?

▸ **8.2.** Существует ли такой выпуклый четырехугольник, в котором любая из сторон длиннее каждой из диагоналей?

▸ **8.3.** Для посадки 10 деревьев подготовлены ямки в 2 ряда на равном расстоянии между соседними ямками.



Как изменив положение 4-х ямок получить 5 прямых линий по 4 дерева на каждой?

▸ **8.4.** Докажите, что при любых значениях a и b, отличных от нуля, хотя бы одно из двух уравнений: $17ax^2+2x+118b=0$ и $x^2+x-\dfrac{2006}{ab}=0$ имеет корень.

▸ **8.5.** Найдите отношение $AO : OC$ (см. рис. 4).

▸ **8.6.** Докажите, что число 3999991 не является простым.

▸ **8.7.** Найдите все трехзначные числа, которые в 16 раз больше суммы своих цифр.

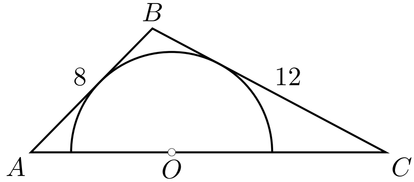


Рис. 4

▸ **8.8.** Девять одинаковых воробьев склевали меньше, чем 1001 зернышко, а десять таких же воробьев склевали больше, чем 1100 зернышек. По скольку зернышек склевывает каждый воробей?

▸**8.9.** Какое из чисел больше:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2006}+\sqrt{2007}} \quad \text{или} \quad \sqrt{2006}?$$

▸**8.10.** Известно, что при некотором натуральном n число n^2+n+9 делится на 7. Каким может быть остаток от деления этого числа на 49?

9-й класс

▸**9.1.** Настенные часы с часовой и минутной стрелками нельзя заводить, если хотя бы одна из стрелок находится между 3 и 4 или между 8 и 9. Сколько в сутках времени, когда эти часы можно заводить?

▸**9.2.** Расположите в порядке возрастания числа: 222^2, 22^{22}, 2^{222}, 22^{2^2}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$. Ответ обоснуйте.

▸**9.3.** Существуют ли два таких выпуклых четырехугольника, что один расположен внутри другого и при этом сумма диагоналей внутреннего четырехугольника больше суммы диагоналей внешнего?

▸**9.4.** Найдите четыре последовательных натуральных числа, произведение которых равно 16144476684360.

▸**9.5.** Даны отрезки a, b, c, d. Постройте отрезок $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$.

▸**9.6.** Докажите, что если рациональные числа a и b связаны равенством $a^{2n+1}+b^{2n+1}=2a^nb^n$, то $1-ab$ есть квадрат рационального числа.

▸**9.7.** При делении многочлена $P(x)$ на $x-1$ получается остаток 2, а при делении на $x-3$ — остаток 1. Найдите остаток при делении $P(x)$ на $(x-1)(x-3)$.

▸**9.8.** Найдутся ли такие натуральные x и y, в сумме дающие 200, что

$$x^2y^2(x^2+y^2)=2\underbrace{00\ldots0}_{11\text{ раз}}6.$$

▸**9.9.** Известно, что $f(x)=3x^2-2x+5$ и $f(g(x))=12x^4+56x^2+70$. Найдите все возможные многочлены $g(x)$.

▸**9.10.** Пусть a, b, c — стороны треугольника.

1) Докажите, что если $2a+3b>8c$, то c — наименьшая сторона этого треугольника.

2) Докажите, что если $2a+3b>7{,}9c$, то c — не обязательно наименьшая сторона этого треугольника.

10-й класс

▸**10.1.** При каких значениях a и b возможно равенство

$$\sin a + \sin b = \sin(a+b)?$$

▸**10.2.** На клавиатуре калькулятора цифровые клавиши расположены так:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Выберем любой прямоугольник, образованный одной или несколькими цифровыми клавишами, и наберем по ходу часовой стрелки или против нее четырехзначное число из цифр, стоящих в углах этого прямоугольника (например, 7777, 7887, 7964). Докажите, что набранное число делится на 11.

▸**10.3.** x, y — числа из отрезка $[0;\ 1]$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1.$$

▸**10.4.** Даны отрезки a, b и c. Постройте отрезок $\sqrt[4]{a^4 - b^3c}$.

▸**10.5.** Докажите, что круги, основанные на сторонах выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, покрывают весь четырехугольник.

▸**10.6.** Докажите справедливость равенства

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{2006\ \text{раз}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{2007}}.$$

▸**10.7.** x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$. Вычислите $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$.

▸**10.8.** Найдите число решений в натуральных числах уравнения:

$$\left[\frac{x}{2005}\right] = \left[\frac{x}{2006}\right] + 1$$

(через $[A]$ обозначена целая часть числа A).

▸**10.9.** Найдите многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль при $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

▸**10.10.** Прямоугольник 5×9 разрезали на 10 прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что среди них обязательно найдутся два одинаковых.

11-й класс

▸**11.1.** Сжё фщёьё мдчё ьёпгфщлуёеё тщг тлюлцг фнервгг $f(x) = 33\left\{\dfrac{7x-1}{33}\right\}+1$. Еёйбгжз зо езтлбугхедз жлирг.

▸**11.2.** Докажите без помощи таблиц, что $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

▸**11.3.** Дан отрезок длины 2. Постройте отрезок $\cos 72^\circ$.

▸**11.4.** Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\dfrac{1}{z}\right| = 1$.

▸**11.5.** Постройте график функции

$$y = \underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{2006\ \text{раз}},\ \text{где}\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

▸**11.6.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$xyz = 2005\cdot 2006\cdot 2007?$$

▸**11.7.** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до любой прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

▸**11.8.** Рассматриваются такие многочлены $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c — целые коэффициенты), что $P(1) = 2006$ и уравнение $P(x) = 0$ имеет три целых корня. Сколько существует таких многочленов?

▸**11.9.** Что больше:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{36}} \quad \text{или} \quad 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}?$$

▸**11.10.** Задайте функцию, определенную во всех точках вещественной прямой и непрерывную ровно в одной точке. Существует ли функция, определенная на всей прямой и непрерывная ровно в двух точках? 2006 точках?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

▸**7.1.** *Ответ.* 10 ям. Бригада из трех землекопов за 3 часа выкапывает 3 ямы, значит, за 1 час — 1 яму. Следовательно, две таких бригады (6 землекопов) за 1 час выкопают 2 ямы, а за 5 часов — 10 ям.

▸**7.2.** Обозначим площади частей разбиения через S_1, S_2, S_3 и S_4, а радиус четверти круга через r. Тогда части 1 и 2 в сумме образуют восьмую часть часть круга, т. е. $S_1 + S_2 = \frac{1}{8}\pi r^2$. Части 2 и 3 в сумме образуют площадь, ограниченную полуокружностью радиуса $\frac{r}{2}$, поэтому $S_2 + S_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi r^2$. Таким образом, $S_1 + S_2 = S_2 + S_3$, откуда $S_1 = S_3$.

▸**7.3.** Возможное расположение кубиков показано на рис. 5. Ключевой момент в решении состоит в том, что кубик $\boxed{5}$ нужно поставить в угол.

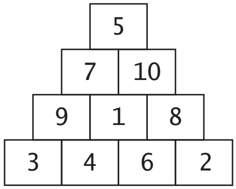


Рис. 5

▸**7.4.** *Ответ.* 52650 : 325 = 162. Заметим, что если мы восстановим две цифры в частном, то сможем посчитать деломое и, значит, восстановить все действия при делении «уголком». Последняя цифра частного должна быть такой, чтобы при умножении на 325 получалось трехзначное число с цифрой 5 в середке. Подходит только 2. Итак, частное имеет вид $1{*}2$. Теперь восстановим последние цифры в третьей и четвертой строках на рис. 3. Ясно, что в третьей строке стоит цифра 5 (она сносится из первой строки), а в четвертой строке может быть только 0, чтобы при вычитании получилась последняя цифра 5. Наконец, можно восстановить вторую цифру в частном, которая при умножении на 325 должна давать четырехзначное число вида $*9*0$. Проверяем цифры 4, 6 и 8. Подходит только 6. Стало быть, частное равно 162.

▸**7.5.** Надо задать незнакомцу вопрос, показывая на любой из двух указателей: «Этот указатель показывает направление в ваш город?» Если указатель показывает направление в город А, то правдолюбец ответит «да», и лжец ответит «да». Если же указатель ведет в город Б, то правдолюбец ответит «нет», и лжец ответит «нет».

▸**7.6.** *Ответ.* $101 - 10^2 = 1$.

▸**7.7.** *Ответ.* $458 \to 45 \to 90 \to 9 \to 18 \to 36 \to 72 \to 7 \to 14$.

▸**7.8.** Ввиду неравенства треугольника для $\triangle ABP$ и $\triangle CBP$ получаем $AB < BP + AP$ и $BC < BP + PC$. Складывая эти неравенства, имеем $AB + BC < 2BP + (AP + PC) = 2BP + AC$, откуда вытекает неравенство задачи. Условие о том, что сторона AC — наименьшая, является излишним.

▸**7.9.** После раскрытия скобок исходное уравнение приобретает вид:

$$x^5 + \frac{1}{2}x + 1 = 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то левая часть уравнения положительна, что невозможно. Поэтому $x < 0$.

▸**7.10.** “Сколько граней у неочиненного шестигранного карандаша?” *Ответ.* 8. Учтите, что шестигранным называют тот карандаш, у которого шесть боковых граней, но ведь есть еще две “маленьких” грани — одна, которую затачивают, и другая, которую кусают. :)

▸**8.1.** *Ответ.* Неверно. Например, числа $a = 0$ и $b = -1$ удовлетворяют соотношению, но не равны между собой. Чтобы отыскать эти значения, мы перенесли оба квадрата в левую часть равенства и разложили как разность квадратов: $(a^2 + a - b^2 - b)(a^2 + a + b^2 + b + 2) = 0$. Выражение в первых скобках опять раскладывается на множители: $a^2 - b^2 + a - b = (a - b)(a + b) + a - b = (a - b)(a + b + 1)$. Следовательно, если $a + b + 1 = 0$, то соотношение задачи выполнено. Отсюда легко подобрать неравные значения a и b.

▸**8.2.** Допустим такой четырехугольник существует. Обозначим его $ABCD$. Проведем в нем диагональ BD. Тогда в $\triangle ABD$ сторона BD — наименьшая (ведь каждая из сторон длинее диагонали), поэтому $\angle A$ — острый (против меньшей стороны лежит меньший угол). Аналогично, из $\triangle BCD$ $\angle C$ — острый. То же самое выясним для диагонали AC: в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ сторона AC — наименьшая, поэтому $\angle B$ и $\angle D$ — острые. Так как все углы четырехугольника $ABCD$ получились острыми, то $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 90° + 90° + 90° + 90° = 360°$. Но в четырехугольнике сумма углов равна 360°. Противоречие.

▸**8.3.** На рис. 6 показаны два возможных варианта расположения ямок (белыми кружками отмечены ямки, изменившие свое положение, а черными кружками — ямки, оставшиеся на месте). Существует много других вариантов, однако все их объединяет то, что в одном ряду остаются на месте четыре ямки, а в другом — две ямки.

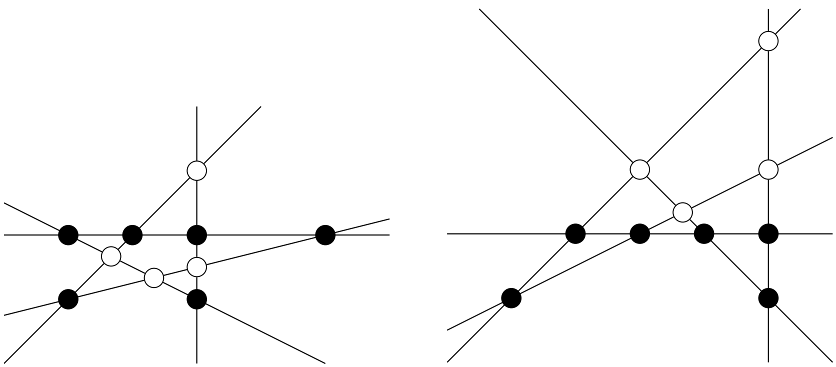


Рис. 6

▸**8.4.** Допустим каждое из двух уравнений не имеет корней, т. е. у них дискриминанты отрицательные.

Для первого уравнения $D = 4 - 4 \cdot 17a \cdot 118b = 4 \cdot (1 - 2006ab) < 0$.

Для второго уравнения $D = 1 + 4 \cdot \dfrac{2006}{ab} < 0$.

Из первого неравенства получаем $ab > \dfrac{1}{2006}$, из второго $\dfrac{2006}{ab} < -\dfrac{1}{4}$. Это не может выполняться одновременно, так как в первом случае ab должно быть положительным, а во втором — отрицательным.

▸**8.5.** *Ответ.* 2 : 3. Проведем из точки O радиусы OE и OF в точки касания (рис. 7). Тогда $OE \perp AB$, $OF \perp BC$ и $OE = OF$. Получается, что точка O равноудалена от сторон угла ABC, значит, BO — биссектриса $\angle B$. По свойству биссектрисы треугольника $AO : OC = AB : BC = 8 : 12 = 2 : 3$.

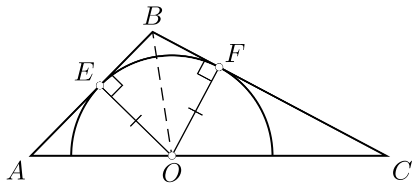


Рис. 7

▸**8.6.** $3999991 = 4000000 - 9 = 2000^2 - 3^2 = (2000-3)(2000+3) = 1997 \cdot 2003$.

▸**8.7.** *Ответ.* 144, 192, 288.

$$\overline{abc} = 16(a+b+c), \quad 100a + 10b + c = 16a + 16b + 16c,$$
$$84a = 6b + 15c, \quad 28a = 2b + 5c.$$

Учитывая, что a, b, c — цифры, оценим выражение $28a = 2b + 5c \leqslant 2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 63$, откуда $a \leqslant \frac{63}{28} = 2\frac{1}{4}$. Так как первая цифра a не может быть нулем, то $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 1$, то $2b + 5c = 28$. Отсюда $2(b+1) = 5(6-c)$, следовательно, $b + 1 \,\vdots\, 5$, т. е. $b = 4$ или $b = 9$. Если $b = 4$, то $c = 4$. Если $b = 9$, то $c = 2$.

Если $a = 2$, то $2a + 5c = 56$. Отсюда $2(b+2) = 5(12-c)$, следовательно, $b + 2 \,\vdots\, 5$, т. е. $b = 3$ или $b = 8$. Если $b = 3$, то $c = 10$, что не подходит. Если $b = 8$, то $c = 8$.

▸**8.8.** *Ответ.* 111. Пусть каждый воробей склевывает по n зернышек. По условию $9n < 1001$ и $10n > 1100$. Значит, $n < \frac{1001}{9} = 111\frac{2}{9}$ и $n > 110$. Неравенствам $110 < n < 111\frac{2}{9}$ удовлетворяет только одно натуральное число $n = 111$.

▸**8.9.** Избавляясь от иррациональности в знаменателях дробей первого числа, получаем, что оно равно

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{2007} - \sqrt{2006}\right) = \sqrt{2007} - 1,$$

при этом $\sqrt{2007} - 1 < \sqrt{2006}$.

▸**8.10.** *Ответ.* 21. По условию число $(n-3)^2+7n$ делится на 7, поэтому $(n-3)^2$ и, следовательно, $n-3$ делятся на 7. Итак, $n=7k+3$. Тогда

$$(n-3)^2+7n=49k^2+49k+21.$$

▸**9.1.** *Ответ.* 7 ч 20 мин. В каждом часе есть 5 мин, когда минутная стрелка находится между 3 и 4, и 5 мин, когда она находится между 8 и 9. Значит, всего в сутках $24\cdot 10$ мин времени, когда часы нельзя заводить из-за минутной стрелки. Теперь посчитаем, сколько времени мешает заводу часовая стрелка. За сутки часовая стрелка обходит два полных круга. В каждом круге в течение одного часа она находится между 3 и 4 и одного часа между 8 и 9, однако в каждом из этих часов мы уже учли 10 мин, когда заводу препятствует минутная стрелка. Поэтому в сутках получается $2\cdot 2\cdot 50$ мин времени, когда часы нельзя заводить исключительно из-за часовой стрели. Подводим итог: $24\cdot 10+2\cdot 2\cdot 50=440$ мин $=7$ ч 20 мин.

▸**9.2.** *Ответ.* $222^2 < 2^{2^{2^2}} < 22^{2^2} < 22^{22} < 2^{222} < 2^{22^2} < 2^{2^{22}}$. Сравним сначала степени двоек:

$$2^{2^{2^2}}=2^{16}<2^{222}<2^{484}=2^{22^2}<2^{2^{22}},$$

где последняя оценка справедлива ввиду того, что показатель $22^2<512=$ $=2^9<2^{22}$. Теперь сравним остальные степени:

$$222^2<256^2=2^{16}=2^{2^{2^2}}=16^4<22^4=22^{2^2}<22^{22}<32^{22}=2^{110}<2^{222}.$$

▸**9.3.** *Ответ.* Существуют. Рассмотрим ромб с диагоналями d и $10d$ и поместим внутрь него прямоугольник со сторонами параллельными диагоналям ромба (рис. 8). Пусть бо́льшая сторона прямоугольника равна $9d$, а меньшая подобрана таким образом, чтобы прямоугольник не “вылезал” за пределы ромба. Тогда сумма диагоналей ромба равна $d+10d=11d$, а в прямоугольнике каждая диагональ больше его стороны $9d$, и поэтому сумма его диагоналей больше $9d+9d>11d$.

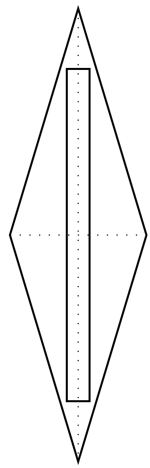


Рис. 8

▸**9.4.** *Ответ.* $2003\cdot 2004\cdot 2005\cdot 2006$. Для простоты записи обозначим $A=16144476684360$. Тогда $n(n+1)(n+2)(n+$ $+3)=A$, где $n\in\mathbb{N}$. Если есть под рукой калькулятор, рассмотрим такое решение. Имеем $n^4<A<(n+3)^4$, $n<$ $<\sqrt[4]{A}<n+3$, отсюда $\sqrt[4]{A}-3<n<\sqrt[4]{A}$. На калькуляторе вычисляем $\sqrt[4]{A}\approx 2004{,}5$, поэтому $2002\leqslant n\leqslant 2004$. Далее нетрудно перебрать все три варианта для n.

В общем случае задачу можно решать так.

$$A = \underline{n}(n+1)(n+2)\underline{(n+3)} = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = \\ = \big((n^2+3n+1)-1\big)\big((n^2+3n+1)+1\big) = (n^2+3n+1)^2-1.$$

Следовательно, $n^2+3n+1 = \sqrt{A+1} = 4018019$ и, решая квадратное уравнение, находим натуральное $n = 2003$.

▸**9.5.** Построим сначала отрезок $u = \sqrt{a^2+b^2}$. Затем, если $c > d$, построим отрезок $v = \sqrt{c^2-d^2}$ и, наконец, $x = \sqrt{u^2-v^2}$. Если же $c < d$, то построим отрезок $v = \sqrt{d^2-c^2}$, после чего $x = \sqrt{u^2+v^2}$.

▸**9.6.** Имеем

$$\big(a^{2n+1}-b^{2n+1}\big)^2 = \big(a^{2n+1}+b^{2n+1}\big)^2 - 4a^{2n+1}b^{2n+1} = \\ = 4a^{2n}b^{2n} - 4a^{2n+1}b^{2n+1} = 4a^{2n}b^{2n}(1-ab).$$

Если $ab \neq 0$, то $1-ab = \left(\dfrac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{2a^nb^n}\right)^2$, причем дробь в скобках является рациональным числом в силу рациональности a и b. Поэтому $1-ab$ есть квадрат рационального числа. Если же $ab = 0$, то $1-ab = 1^2$. (Последний случай возможен только при $a = b = 0$.)

▸**9.7.** *Ответ.* $-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. По условию

$$P(x) = (x-1)F(x) + 2, \\ P(x) = (x-3)G(x) + 1,$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — некоторые многочлены (частные, полученные при делении). Эти равенства выполнены при всех x. Подставим в первое из них $x = 1$, а во второе $x = 3$. Получим $P(1) = 2$ и $P(3) = 1$ $(*)$.

В общем случае остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$. Это утверждение называется *теоремой Безу* в честь французского математика XVIII в.

Далее обозначим частное от деления $P(x)$ на $(x-1)(x-3)$ через $Q(x)$, а остаток через $R(x)$: $P(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + R(x)$. Степень остатка должна быть меньше, чем степень делителя. Но делитель имеет вторую степень, значит, остаток $R(x)$ должен быть линейным многочленом $ax + b$ (или константой, если $a = 0$). Имеем

$$P(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + ax + b.$$

Подставив в это равенство сначала $x = 1$, затем $x = 3$ и воспользовавшись $(*)$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 3a + b = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

▸**9.8.** *Ответ.* Таких x и y не существует. Рассмотрим остатки при делении x и y на 5. Ясно, что числа x и y не делятся на 5. Число в правой части соотношения дает остаток 1 при делении на 5. Поскольку $x + y = 200$, то x и y могут давать при делении на 5 либо остатки 1 и 4, либо 2 и 3 с точностью до порядка (порядок не важен ввиду симметрии).

В первом случае для определенности положим $x \equiv 1$, $y \equiv 4 \pmod 5$. Тогда $x^2 \equiv 1 \pmod 5$, $y^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod 5$, $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 5$ и, значит, $x^2y^2(x^2+y^2) \equiv 2 \pmod 5$, что противоречит с тем, что правое число равенства дает остаток 1 при делении на 5.

Во втором случае $x \equiv 2$, $y \equiv 3 \pmod 5$, следовательно, $x^2y^2(x^2+y^2) \equiv$ $\equiv 2^2 \cdot 3^2 \cdot (2^2+3^2) \equiv 3 \pmod 5$, что также невозможно.

⧫ Существует и другой способ решения. Попробуйте доказать, что если $x+y = 200$, то $x^2y^2(x^2+y^2) \leqslant 2 \cdot 10^{12}$, откуда сразу ясно, что соотношение задачи невозможно.

▸**9.9.** *Ответ.* $g(x) = 2x^2 + 5$ и $g(x) = -2x^2 - \frac{13}{3}$. Решим задачу методом неопределенных коэффициентов. Понятно, что $g(x)$ должен быть квадратным трехчленом $g(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, иначе $f(g(x))$ не будет многочленом четвертой степени. Имеем $f(g(x)) = 3(ax^2+bx+c)^2 - 2(ax^2 +$ $+ bx + c) + 5$. Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x к коэффициентам многочлена из условия задачи, находим: $3a^2 = 12$, $b = 0$, $6ac - 2a = 56$, $3c^2 - 2c + 5 = 70$, откуда $a = 2$, $c = 5$ или $a = -2$, $c = -\frac{13}{3}$.

▸**9.10.** 1) Докажем, что если $2a + 3b > 8c$, то c — наименьшая сторона. Действительно, если $c \geqslant a$, то $3b > 6c + 2(c-a) \geqslant 6c$, отсюда $b > 2c \geqslant c + a$. Противоречие с тем, что $b < c + a$ (ввиду неравенства треугольника). Если же $c \geqslant b$, то $2a > 5c + 3(c - b) \geqslant 5c$, отсюда $a > 2{,}5c > b + c$. Противоречие с тем, что $a < b + c$.

2) Существует треугольник со сторонами $a = 5{,}5$, $c = 5{,}55$, $b = 11$. Легко проверить, что $2a + 3b > 7{,}9c$ и при этом $c > a$.

▸**10.1.** *Ответ.* Либо $a = 2\pi k$, либо $b = 2\pi n$, либо $a + b = 2\pi m$. Преобразуем левую часть равенства по формуле суммы синусов, а правую — по формуле двойного аргумента.

$$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$
$$\sin\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right) = 0,$$
$$\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} = 0.$$

Из последнего равенства получаем ответ.

▸**10.2.** Выведем признак делимости числа $\overline{abcd}$ на 11. Находим $\overline{abcd} =$ $= 1000a + 100b + 10c + d = 11 \cdot (91a + 9b + c) - a + b - c + d$. Значит, число

$\overline{abcd} \vdots 11$, если $(a+c)-(b+d) \vdots 11$. Заметим, что какой бы прямоугольник, образованный цифровыми клавишами, мы не выбрали, суммы противоположных угловых чисел равны. Поэтому для числа $\overline{abcd}$, составленного из угловых цифр, справедливо: $a+c=b+d$, отсюда $(a+c)-(b+d)=0 \vdots 11$.

▸**10.3.** Умножим обе части неравенства на $(1+x)(1+y)>0$. После преобразований неравенство сводится к следующему: $x^2+y^2 \leqslant 1+xy$. Последнее легко доказывается при помощи промежуточной оценки:

$$x^2+y^2 \leqslant x+y \leqslant 1+xy.$$

Левая оценка верна, т. к. $x^2 \leqslant x$ и $y^2 \leqslant y$ для чисел x, $y \in [0;\ 1]$. Правая оценка равносильна неравенству $(1-x)(1-y) \geqslant 0$, что тоже справедливо для чисел из отрезка $[0,\ 1]$.

▸**10.4.** Преобразуем выражение для искомого отрезка:

$$\sqrt[4]{a^4-b^3c} = \sqrt[4]{a^2\left(a^2-\frac{b^3c}{a^2}\right)} = \sqrt{a\sqrt{a^2-\frac{b^3c}{a^2}}} = \sqrt{a\sqrt{a^2-\left(\frac{b\sqrt{bc}}{a}\right)^2}}.$$

Отсюда ясна последовательность построения. Сначала построим отрезок $x=\sqrt{bc}$, затем $y=\dfrac{bx}{a}$, затем $z=\sqrt{a^2-y^2}$ и, наконец, искомый отрезок $\sqrt{az}$.

Эта задача предлагалась на конкурсных экзаменах в Императорском Московском Техническом училище в 1910 году.

▸**10.5.** Допустим найдется такая точка O, которая не покрывается ни одним кругом. Рассмотрим круг, основанный на стороне AB четырехугольника (рис. 9). Так как точка O лежит вне этого круга, то $\angle AOB$ — острый (этот угол равен полуразности дуг, на которые опирается, т. е. 90° за вычетом градусной меры “маленькой” дуги). Аналогично доказывается, что $\angle BOC$, $\angle COD$ и $\angle DOA$ — острые. Тогда сумма всех четырех углов меньше $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Противоречие.

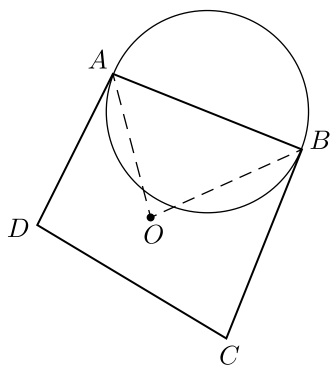


Рис. 9

▸**10.6.** Справедливость равенства легко доказывается по индукции для любого количества n корней, в частности для $n=2006$, используя тождество:

$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2+2\cos\alpha} \quad \left(0<\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$

▸ **10.7.** *Ответ.* -15. Заметим, что число x_1 удовлетворяет равенству $x^3 = 3x - 1$, ведь это корень данного уравнения. Отсюда

$$x_1^5 = x_1^2 \cdot x_1^3 = x_1^2(3x_1 - 1) = 3x_1^3 - x_1^2 = 3(3x_1 - 1) - x_1^2.$$

Аналогично для корней x_2 и x_3. Таким образом,

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 9(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 9.$$

Теперь воспользуемся теоремой Виета для кубического уравнения:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 6,$$

и окончательно

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 9 \cdot 0 - 6 - 9 = -15.$$

▸ **10.8.** *Ответ.* $2005 \cdot 2006$ решений. Разделим x на 2005 и на 2006 с остатком: $x = 2005i + j = 2006k + l$ $(*)$, где $0 \leqslant j < 2005$, $0 \leqslant l < 2006$, $i \geqslant 0$, $k \geqslant 0$. Уравнение $\left[\dfrac{x}{2005}\right] = \left[\dfrac{x}{2006}\right] + 1$ означает, что $i = k + 1$. Подставим это в условие $(*)$: $2005(k + 1) + j = 2006k + l$, значит, $2005 + j = k + l$ $(**)$.

Определим количество троек целых чисел $0 \leqslant j < 2005$, $0 \leqslant l < 2006$, $k \geqslant 0$, удовлетворяющих $(**)$. Это количество равно числу решений исходного уравнения. Поскольку для каждой возможной пары чисел j, l, мы имеем лишь одну возможность для k, а именно, $k = 2005 + j - l$ (при этом ситуация $k = l = 0$, при которой $x = 0$, очевидно, невозможна), то искомое число троек равно $2005 \cdot 2006$.

▸ **10.9.** *Ответ.* $p(x) = x^{10} - 16x^8 - 6x^7 + 73x^6 + 24x^5 - 125x^4 + 354x^3 + 2x^2 - 36x + 1$.

1) Построим многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Получаем $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; $\left(x^2 - 5\right)^2 = 24$; $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

2) Аналогично, построим многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Получаем

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^3 = 3; \quad x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 6x - 2\sqrt{2} = 3;$$
$$\left(x^3 + 6x - 3\right)^2 = 2\left(3x^2 + 2\right)^2;$$
$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Перемножив два построенных многочлена, получим искомый многочлен.

▸ **10.10.** Предположим, что все 10 прямоугольников различны. Покажем, что в этом случае сумма их площадей больше площади прямоугольника 5×9. Рассмотрим самые маленькие по площади прямоугольники:

1 клетка	1×1	
2 клетки	1×2	
3 клетки	1×3	
4 клетки	1×4,	2×2
5 клеток	1×5	
6 клеток	1×6,	2×3
7 клеток	1×7	
8 клеток	1×8,	2×4

Отсюда ясно, что наименьшая возможная сумма площадей 10 различных прямоугольников равна

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46 > 5 \cdot 9.$$

Полученное противоречие доказывает, что должны быть одинаковые прямоугольники.

▸**11.1.** Ай-аюшки! Нехорошо смотреть в решение, не подумав над задачей. Просто расшифруйте сначала эту абра-швабра-кадабру.

Подсказка. Сколько букв в русском алфавите?

Итак, Вы догадались, что функция $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки $\{\ \}$ обозначают дробную часть числа. Как нетрудно проверить, функция $f(x)$ переводит любое целое число от 1 до 33 (порядковый номер буквы в алфавите) также в целое число от 1 до 33 (другой порядковый номер). Иными словами она переводит букву в другую букву. Если попробовать расшифровать сообщение с помощью этой функции, то ничего путного не выходит. Стало быть, эта функция сама использовалась при шифровании, и нам нужно найти способ дешифровки.

Посмотрим: $f(1) = 7$, значит, а $\to$ ё. Теперь понятно, почему наше сообщение так часто ёкает. Запишем это в таблицу дешифровки (см. 7-й столбец). Так можно поступить для каждой из остальных букв, пока кондрашка не тяпнет.

Таблица дешифровки.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
с	д	ц	и	ы	н	а	т	е	ч	й	ь	о	б	у	ё	ш

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
к	э	п	в	ф	ж	щ	л	ю	р	г	х	з	ъ	м	я

Однако через несколько шагов становится понятно, что буквы а, б, в, г, д, ... ставятся на каждую 7-ю позицию, и если выходят за границу 33, то просто “заворачиваются” на 33 позиции назад. Получаем позиции: $7 \to$ $\to 14 \to 21 \to 28 \to (35-33=2) \to \ldots$ и т. д. После заполнения таблицы, наконец, расшифруем сообщение:

Эта фраза была зашифрована при помощи функции
$f(x) = 33\left\{\dfrac{7x-1}{33}\right\}+1$. Найдите её неподвижные точки.

Задача приобрела лицо. Решим ее. Из таблицы видно, что неподвижными остаются позиции 11, 22 и 33 (соответственно, буквы й, ф и я). Возможно есть и другие неподвижные точки, не обязательно целые. Решим уравнение $f(x) = x$.

$$33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1=x; \qquad \left\{\frac{7x-1}{33}\right\}=\frac{x-1}{33};$$
$$\frac{7x-1}{33}-\left[\frac{7x-1}{33}\right]=\frac{x-1}{33}; \qquad \left[\frac{7x-1}{33}\right]=\frac{2x}{11}.$$

Обозначим $\left[\dfrac{7x-1}{33}\right] = n$, где n — целое число. Тогда $\dfrac{2x}{11} = n$, откуда $x = \dfrac{11n}{2}$. Подставим это выражение для x в последнее уравнение:

$$\left[\frac{\frac{77n}{2}-1}{33}\right]=n; \quad \left[\frac{77n-2}{66}\right]=n; \quad \left[n+\frac{11n-2}{66}\right]=n.$$

Следовательно, $0 \leqslant \dfrac{11n-2}{66} < 1$. Отсюда $\dfrac{2}{11} \leqslant n < \dfrac{68}{11}$, т. е. $1 \leqslant n \leqslant 6$. В ответе получаем шесть соответствующих неподвижных точек x.

Ответ. $\frac{11}{2}$, 11, $\frac{33}{2}$, 22, $\frac{55}{2}$, 33.

▸**11.2.** $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10 > 2$, поскольку $10 > \pi^2$.

▸**11.3.** Покажем, что $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC = 1$, $\angle A = \angle C = 72^\circ$ (рис. 10). Проведем в нем биссектрису AK. Из равнобедренного треугольника KAC находим $KC = 2\cos 72^\circ$. Обозначим $\cos 72^\circ = x$, тогда $KC = 2x$, $AB = BC = 1 + 2x$. По свойству биссектрисы AK находим $BK : KC = AB : AC$, т. е.

$$\frac{1}{x} = \frac{1+2x}{1}, \quad 4x^2+2x-1=0.$$

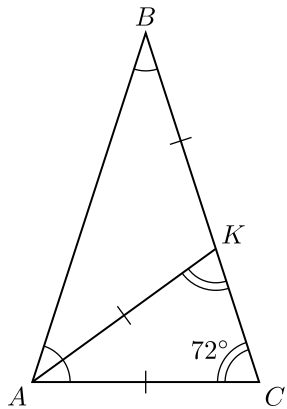


Рис. 10

Решив данное квадратное уравнение, найдем $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Поскольку $x = \cos 72^\circ > 0$, то $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Чтобы построить отрезок x, строим сначала отрезок $\sqrt{5}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2, затем "укорачиваем" его на единичный отрезок и делим на 4 равные части.

▸**11.4.** *Ответ.* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Пусть $z = a + bi$, где a и b — действительные числа. Требуется найти наибольшее значение величины $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ при условии, что

$$\left| a + bi + \frac{a-bi}{a^2+b^2} \right| = 1, \text{ т. е. } \left(a + \frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{a^2+b^2}\right)^2 = 1.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве, имеем:

$$a^2 + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + b^2 - \frac{2b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} = 1,$$

или, сгруппировав члены с $(a^2+b^2)^2$ в знаменателе,

$$a^2 + b^2 + \frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{a^2+b^2} = 0,$$

отсюда

$$\left(a^2+b^2\right)^2 - 3\left(a^2+b^2\right) + 1 = -4a^2 \leqslant 0.$$

Решив полученное квадратное неравенство относительно a^2+b^2, находим:

$$a^2+b^2 \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \qquad \sqrt{a^2+b^2} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

причем равенство достигается только при $a = 0$, $b = \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

▸**11.5.** По индукции устанавливается, что

$$\underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{n \text{ раз}} = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

Следовательно, необходимо построить график $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+2006x^2}}$. Область определения — вся прямая. Вычислим асимптоты графика:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{1}{\sqrt{2006}}, \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\frac{1}{\sqrt{2006}}.$$

Асимптотами являются прямые $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2006}}$. Схема графика показана на рис. 11.

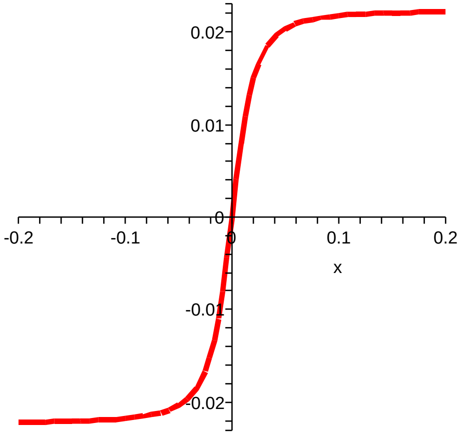


Рис. 11

▸ **11.6.** *Ответ.* $2 \cdot 3^7 = 4374$. Разложим числа в правой части уравнения на простые сомножители: $2005 = 5 \cdot 401$, $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$, $2007 = 3^2 \cdot 223$. Таким образом, необходимо найти число решений такого уравнения:

$$xyz = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 59 \cdot 223 \cdot 401.$$

Понятно, что число решений равно числу способов распределить простые сомножители по переменным x, y и z. Возьмем три пустые коробки и наклеим на них этикетки $\boxed{x}$, $\boxed{y}$ и $\boxed{z}$. Теперь будем раскидывать простые сомножители по коробкам, пока не раскидаем все сомножители. Если в итоге какая-то коробка окажется пустой, то присвоим соответствующей переменной значение 1, иначе присвоим ей значение произведения всех сомножителей в этой коробке. Итак, сколькими способами можно раскидать сомножители по коробкам?

Число 2 можно распределить тремя способами: либо в коробку $\boxed{x}$, либо в $\boxed{y}$, либо в $\boxed{z}$. Аналогично, для сомножителей 5, 17, 59, 223 и 401. Все эти числа различны и встречаются по одному разу, поэтому одинаковых распределений не получится. Однако сомножитель 3 встречается два раза, поэтому перечислим все способы распределить два одинаковых сомножителя одновременно:

	$\boxed{x}$	$\boxed{y}$	$\boxed{z}$
1 сп.	3, 3	–	–
2 сп.	–	3, 3	–
3 сп.	–	–	3, 3
4 сп.	3	3	–
5 сп.	3	–	3
6 сп.	–	3	3

Всего 6 способов (а не 9, как если бы мы считали распределение двух сомножителей по отдельности). Итого число способов раскидать все сомножители по коробкам (по правилу произведения комбинаторики) равно $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^7 = 4374$.

♦ Сколькими способами можно разложить k одинаковых шаров по n различным коробкам (коробки могут оказаться пустыми)? Ответ на этот вопрос: C_{k+n-1}^k. Подумайте, почему.

▸**11.7.** Расположим куб с ребром p в пространстве так, чтобы его центр находился в начале координат, а грани были параллельны координатным плоскостям. Тогда координаты его вершин — $\left(\pm\frac{p}{2},\ \pm\frac{p}{2},\ \pm\frac{p}{2}\right)$. По формуле расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l: $ax+by+cz = 0$, проходящей через центр куба,

$$\rho(M,\ l) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

найдем, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой l равна $2p^2$, т. е. не зависит от положения прямой.

▸**11.8.** *Ответ.* 20 многочленов. Имеем $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — целые корни. Так как $P(1) = 2006$, то

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 2006.$$

Подсчитаем сколько троек целых x_1, x_2, x_3 удовлетворяет последнему равенству, причем для нас порядок не важен. Различным наборам (x_1, x_2, x_3) соответствуют различные a, b, c (ведь по коэффициентам a, b, c однозначно восстанавливаются корни). Поэтому найдя число таких троек, мы получим число искомых многочленов.

Разложив на простые множители $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$, нетрудно перебрать все тройки натуральных множителей $1 - x_1$, $1 - x_2$, $1 - x_3$, дающих в произведении 2006. Это $(2,\ 17,\ 59)$, $(1,\ 2\cdot17,\ 59)$, $(1,\ 2,\ 17\cdot59)$, $(1,\ 17,\ 2\cdot59)$, $(1,\ 1,\ 2 \cdot 17 \cdot 59)$. Для каждой тройки существует четыре способа выбрать знаки сомножителей: $(+,\ +,\ +)$, $(-,\ -,\ +)$, $(-,\ +,\ -)$, $(+,\ -,\ -)$. Итого $5 \cdot 4 = 20$ вариантов.

▸**11.9.** Обозначим левое число через S_1, правое — через S_2 и рассмотрим функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Тогда S_1 равно $f(1) + f(2) + \ldots +$

$+ f(36)$ и является интегральной суммой с шагом $\Delta x = 1$, подсчитанной с недостатком для функции $f(x)$ на отрезке $[0, 36]$ (рис. 12). Поэтому

$$S_1 < \int_0^{36} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^{36} = 12.$$

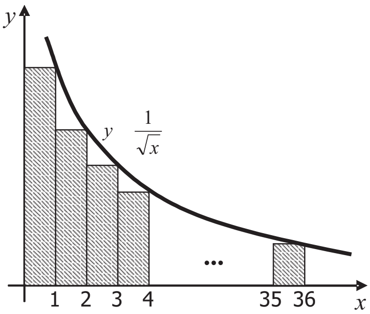


Рис. 12

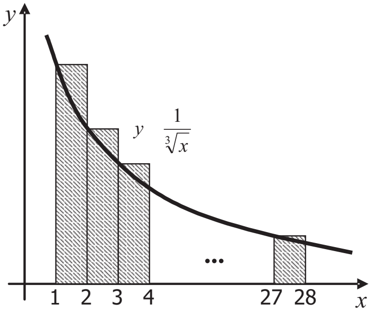


Рис. 13

Аналогично, $S_2 = g(1) + g(2) + \ldots + g(27)$ и является интегральной суммой, подсчитанной с избытком для функции $g(x)$ на отрезке $[1, 28]$ (рис. 13). Поэтому

$$S_2 > \int_1^{28} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx > \int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} x^{2/3}\Big|_1^{27} = 12.$$

Таким образом, $S_1 < 12 < S_2$.

▸ **11.10.** Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ x, & \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Для любого положительного d при $|x| < d$ $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < d$, поэтому функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. С другой стороны пусть $a \neq 0$. В любой окрестности точки $x = a$ найдутся две точки $x = b$ и $x = c$ такие, что b — рационально, а c — иррационально, причем иррациональное число c можно выбрать так, что $|c - a| < |a|/2$. Тогда в любой окрестности числа a для этих b и c из рассматриваемой окрестности выполнено $|f(b) - f(c)| > |0 - a/2| = |a/2|$, что противоречит непрерывности функции $f(x)$ в точке a.

Чтобы построить функцию, непрерывную в двух точках и разрывную во всех остальных, выберем любую функцию, график которой пересекает прямую $y = 0$ ровно в двух точках, скажем, параболу, и зададим значения на ней в иррациональных точках и 0 в рациональных. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — рационально,} \\ x^2 - 1, \text{ если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Для 2006 непрерывных точек, аналогично, можно взять многочлен 2006-й степени, имеющий 2006 различных корней. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ — рационально,} \\ (x-1)(x-2)\ldots(x-2006), \text{ если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$