САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Олимпиада по математике для абитуриентов

21 марта 1999 г

1. Построить многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого являлось бы число α.

$$\alpha = \sqrt{5+\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{15}} + \sqrt{5-\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{15}}.$$

Какова наименьшая степень этого многочлена?

2. Решить уравнение

$$\log_{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x^2+2x-2) = \log_{2-\sqrt{3}}(x^2+2x-3).$$

3. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$.

4. $f(x)$ определена для всех действительных чисел x, и для всех x справедливо

$$f(x+19) \geqslant f(x) + 19,$$

$$f(x+99) \leqslant f(x) + 99.$$

Докажите, что функция $g(x) = f(x) - x$ периодическая.

5. Пусть A и B заданные множества. Найти множество X, если известно, что

$$\begin{cases} A \cup X = B \cup X = A \cup B \\ A \cap B \cap X = \varnothing \end{cases},$$

где $\varnothing$ — пустое множество.

6. В остроугольном треугольнике проведены три высоты. Основания высот образуют треугольник, площадь которого составляет 25% площади данного треугольника. Найти углы исходного треугольника.

7. В основании четырехугольной пирамиды лежит трапеция со сторонами 2 см, 3 см, 5 см, 6 см. Две противоположные грани перпендикулярны основанию. Найдите боковые ребра пирамиды, если ее объем равен 24 см^3.

8. Найти все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение, если для любого $x \neq 1$ $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$xf\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + f(x) = 2.$$

9. Решить неравенство

$$\arcsin x - 2\arccos x > \frac{\pi}{3}$$

10. Бесконечная последовательность чисел x_n такова, что $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ для любого натурального n, причем $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Докажите, что если x_1 рационально, то, начиная с некоторого места, данная последовательность периодическая.